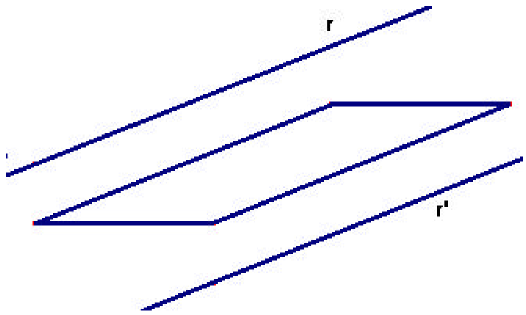
GLOBAL DE GEOMETRÍA 2º Bach.   Ciencias de Ingeniería y Salud- 18 de mayo- 2004
FICHA: Global de Geometría 4

1. Calcula el punto simétrico del punto A(1,-1,2) respecto del plano $p \equiv x + 4y - z = 2$
2 puntos

2. Dados los puntos A(4,0,0) y B(0,2,2)
Comprueba que la recta que determinan r es paralela al plano de ecuación: $p \equiv x-3y+5z=2$.
Calcula la distancia entre la recta y el plano.
Halla la ecuación de la otra recta r' que está a la misma distancia de p . **2'5 puntos**



3. Los puntos A(1,1,0) y B(2,2,1) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. Además se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen. Calcula C y D.
2'5 puntos

4. Calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos:

$$\begin{cases} p_1 \equiv x + y - 2z = 2 \\ p_2 \equiv x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

1'5 puntos

5. Sean los planos siguientes: $\begin{cases} p_1 \equiv x + y + z = a - 1 \\ p_2 \equiv 2x + y + az = a \\ p_3 \equiv x + ay + z = 1 \end{cases}$.

¿Para qué valores de a los tres planos se cortan en un punto?
¿Qué posición tienen los planos si a = 1?, ¿y para a =2? **1'5 puntos**

SOLUCIONES AL GLOBAL DE GEOMETRÍA 2º Bach. Ciencias de Ingeniería y la Salud-
18 de mayo- 2004 FICHA: Global 4

1. Para calcular el punto simétrico del punto A(1,-1,2)respecto del plano $\pi \equiv x + 4y - z = 2$, necesitamos:
a) hallar la recta r perpendicular al plano que pasa por A.
b) P = proyección ortogonal de A sobre π es la intersección de r y π
c) El simétrico de A, A', lo calculamos teniendo en cuenta que P es punto medio de AA'.

a) para r tomamos el vector normal al plano como su vector dirección $\Rightarrow$ **r** $\equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+4\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}$

b) hallamos la intersección de r y $\pi \Rightarrow$ 1+ λ +4(-1+4 λ)-(2- λ)=2 $\Rightarrow$ $\lambda = \dfrac{7}{18} \Rightarrow$ **P**$\left(\dfrac{25}{18},\dfrac{10}{18},\dfrac{29}{18}\right)$

c) $\dfrac{25}{18} = \dfrac{1+x}{2} \Rightarrow x = \dfrac{32}{18}$, de la misma manera calculamos las demás coordenadas resultando

$$\boxed{A'\left(\frac{32}{18},\frac{38}{18},\frac{22}{18}\right) = A'\left(\frac{16}{9},\frac{19}{9},\frac{11}{9}\right)}$$

2.
a) la recta que determinan, r, tiene el vector dirección $\mathbf{v_r}$= (4,-2,-2), lo multiplicamos escalarmente por $n_p(1,-3,5)$ para comprobar si son perpendiculares $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{v_r} \cdot n_p = 4+6-10=0}$
$\Rightarrow$ estos dos vectores son perpendiculares, es decir el plano y la recta son paralelos.

b) Para calcular la distancia entre la recta y el plano tomamos el punto A y el plano

$$\boxed{d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{4-2}{\sqrt{1+9+25}} = \frac{2}{\sqrt{35}} u = 0'34\ u \text{ aprox.}}$$

c) Para hallar la ecuación de la otra recta r' que está a la misma distancia de π vamos a hallar el simétrico de A respecto a π, A', y después la recta r' será la que pase por A' y tenga el vector $\mathbf{v_r}$.
Este apartado se hace exactamente igual que el ejercicio 1. Calculando primero la proyección ortogonal de A sobre π, resulta P$\left(\dfrac{138}{35},\dfrac{6}{35},\dfrac{-10}{35}\right)$ y teniendo en cuenta que P es el punto medio de AA' $\Rightarrow$ **A' =** $\left(\dfrac{136}{35},\dfrac{12}{35},\dfrac{-20}{35}\right) \Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{r'} \equiv \begin{cases} x = \dfrac{136}{35}+4\lambda \\ y = \dfrac{12}{35}-2\lambda \\ z = \dfrac{-20}{35}-2\lambda \end{cases}}$

3.

La recta que contiene C y D es paralela al vector $\vec{AB}\,(1,1,1)$ pues se trata de un rectángulo, si además pasa por el origen, la recta será: $r \equiv (\lambda, \lambda, \lambda)$, así pues los puntos C y D serán de esta forma.

Para calcular el punto D vamos a hallar el producto escalar de $\vec{AD}\cdot\vec{AB} = 0 \Rightarrow$ $\vec{AD}(\lambda-1, \lambda-1, \lambda)\cdot\vec{AB}(1,1,1) = 0 \Rightarrow \lambda-1+\lambda-1+\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{D\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}$ y C lo calculamos teniendo en cuenta que $\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)}$

4. El lugar geométrico de los puntos P(x, y, z) que equidistan de los planos: $\begin{cases}\pi_1 \equiv x+y-2z=2\\ \pi_2 \equiv x-2y+z=2\end{cases}$ son los planos bisectores de estos dos: se calculan de la forma siguiente: d(P,π_1) = d(P,π_2) $\Rightarrow$ $\frac{|x-y-2z-2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|x-2y+z-2|}{\sqrt{1+4+1}} \Rightarrow |x-y-2z-2| = |x-2y+z-2| \Rightarrow$

Quitamos las barras teniendo en cuenta que los interiores pueden tener igual o distinto signo, es decir, $(x-y-2z-2) = \pm(x-2y+z-2) \Rightarrow$ tomando una vez el signo + y otra el -, nos salen los dos planos que son: $\boxed{\pi' \equiv y-z=0 \qquad \pi'' \equiv 2x-y-z-4=0}$

5. Para saber la posición de los tres planos tenemos que saber el rango de la matriz del sistema: Vamos a hallar el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&a\\1&a&1\end{vmatrix} = -a^2+3a-2$, que se hace 0 para los valores a = 1 y a = 2

Por lo tanto **los tres planos se cortan en un punto cuando el sistema sea compatible y determinado, es decir, $a \neq 1$ y $a \neq 2$.**

Estudiamos la posición para $\boxed{a=1}$: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)$, donde nos damos cuenta con las filas 1 y 3 que el sistema es incompatible, el r (A)=2 y r(A')=3, **los planos 1 y 3 son paralelos y el tercero los corta**.

Estudiamos la posición para $\boxed{a=2}$: $r(A') = r\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&1&2&2\\1&2&1&1\end{array}\right) \underset{F_3-F_1}{\overset{F_2-2F_1}{=}} r\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right) = 2$, donde nos damos cuenta que el sistema es compatible indeterminado de rango 2, **los tres planos son distintos y se cortan según una recta**.